Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 12 : Loi binomiale

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

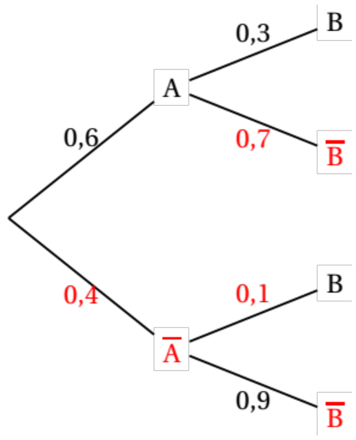
Ce premier chapitre de probabilités se concentre sur l'étude de la succession d'un nombre quelconque d'épreuves aléatoires indépendantes. C'est l'occasion d'introduire les épreuves et schéma de Bernoulli, ainsi que la distribution binomiale.
Plusieurs exemples simples permettent de découvrir les schémas de Bernoulli, et la loi de probabilité de la distribution binomiale, avec l'utilisation d'arbres modélisant une répétition d'un nombre croissant d'épreuves de Bernoulli. Naturellement, la notion d'espérance est abordée et la formule donnant la variance est conjecturée (sa démonstration étant reportée dans le chapitre suivant).
Après une révision des principales notions de probabilités vues en première en introduction, la première partie du chapitre permet de définir les épreuves et loi de Bernoulli. Dans un deuxième temps, les schémas de Bernoulli et la distribution binomiale sont abordés ainsi que la loi de probabilité, l'espérance et la variance de cette loi. Dans une dernière partie, des questions en rapport avec l'échantillonnage sont soulevées.
Les exercices permettent tout d'abord de découvrir, de manière progressive, les trois parties du chapitre ; de nombreux exercices simples sont donnés, pour revenir sur le sens, et construire les automatismes. Une fois cette étape franchie, des problèmes de modélisation plus ambitieux permettent à la fois une synthèse des contenus, à la fois du chapitre, et plus généralement du programme des classes de seconde et première, ainsi que la découverte d'applications de la distribution binomiale.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud doit valoir 1. L'ensemble des événements correspondant aux branches issues d'un même noeud doivent constituer une partition de l'univers. On obtient l'arbre suivant.



Corrigé exercice 2 :

$P(A \cap B)$ se calcule de la manière suivante : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,18$.
Pour calculer $P(B)$, on utilise la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ $P(B) = 0,18 + 0,4 \times 0,1 = 0,22$.

Corrigé exercice 3 :

Par lecture directe sur l'arbre pondéré, $P_A(B) = 0,3$. D'après la définition des probabilités conditionnelles, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,22} = \frac{9}{11}$.

Corrigé exercice 4 :

On a d'une part, $P(A)P(B) = 0,6 \times 0,22 = 0,132$. D'autre part, $P(A \cap B) = 0,18$. Donc $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ et A et B ne sont donc pas indépendants.

Corrigé exercice 5 :

Première méthode :
$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$ $P(A \cup B) = 0,18 + 0,42 + 0,04$ $P(A \cup B) = 0,64$
Seconde méthode :
L'événement contraire de $A \cup B$ est $\overline{A} \cap \overline{B}$, donc : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $P(A \cup B) = 1 - 0,4 \times 0,9$ (par lecture de l'arbre) $P(A \cup B) = 0,64$
Une troisième méthode consiste à utiliser $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Corrigé exercice 6 :

Calcul de l'espérance de X :
$E(X) = P(X = -1) \times (-1) + P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 + P(X = 5) \times 5$
$E(X) = 0,2 \times (-1) + 0,15 \times 0 + 0,5 \times 1 + 0,15 \times 5 = 1,05$
Calcul de la variance de X :
$V(X) = P(X = -1) \times (-1 - E(X))^2 + \ldots + P(X = 5) \times (5 - E(X))^2$
$V(X) = 0,2 \times (-1 - 1,05)^2 + 0,15 \times (0 - 1,05)^2 + 0,5 \times (1 - 1,05)^2 + 0,15 \times (5 - 1,05)^2$
$V(X) = 3,3475$

Corrigé exercice 7 :

1. $C_0 = \binom{5}{0} = 1$
   $C_1 = \binom{5}{1} = 5$
   $C_4 = \binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = 5$
   $C_5 = \binom{5}{5} = \binom{5}{5-5} = 1$
2. $C_2 = C_3 = 10$

Corrigé exercice 8 :

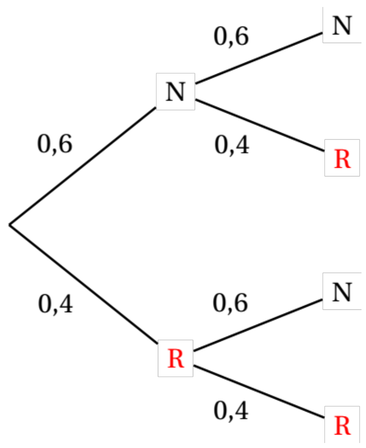
Voici un exemple de script possible.

```python
from random import randint

def lancers(N):
    NombreCinqObtenus = 0
    for jet in range(N):
        if randint(1, 6) == 5:
            NombreCinqObtenus = NombreCinqObtenus + 1
    return NombreCinqObtenus
```

Corrigé exercice 9 :

1. Cette situation peut être représentée par l'arbre suivant.

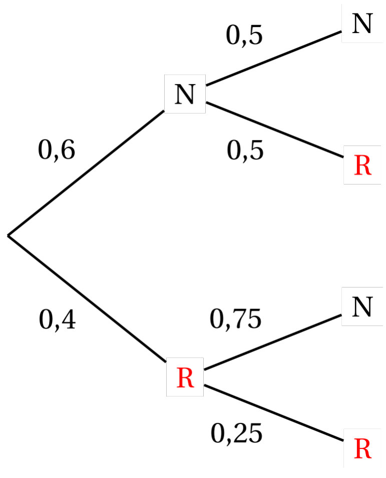


On obtient alors la loi de probabilité suivante.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

La formule de l'espérance donne $E(X) = 0,36 \times 0 + 0,48 \times 1 + 0,16 \times 2 = 0,8$.

2. Cette situation peut être représentée par l'arbre suivant.



On obtient alors la loi de probabilité suivante.

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,3	0,6	0,1

La formule de l'espérance donne $E(Y) = 0,3 \times 0 + 0,6 \times 1 + 0,1 \times 2 = 0,8$.

3 Activités

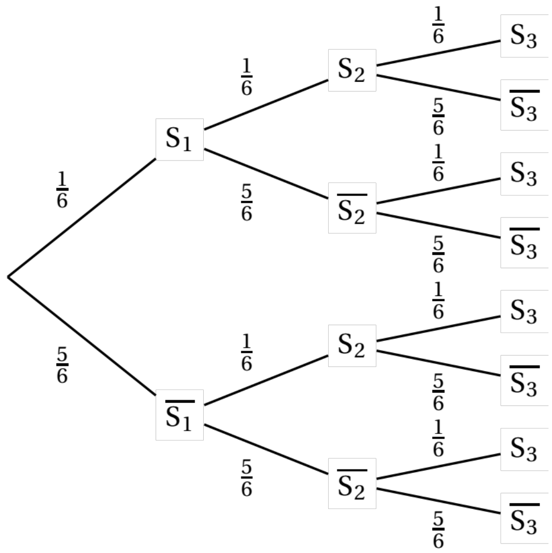
3.1 Corrigé activité A :

Questions :

Partie A

1. Les lancers sont identiques et indépendants, la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, sans effet sur les suivantes.

2. Étant donné que $n = 3$, on obtient l'arbre pondéré suivant.



3. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

4. Un seul chemin permet d'obtenir $X = 0$.Par lecture de l'arbre on obtient $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0,579$.

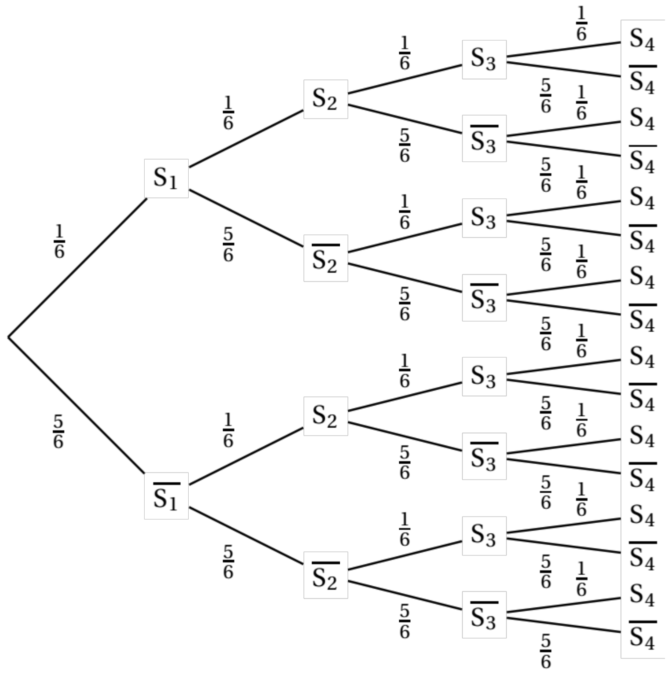
5. a. Trois chemins permettent d'obtenir une unique apparition de la face 6.
   b. Pour chacun de ces chemins, on passe une fois par la probabilité $\frac{1}{6}$ et deux fois par la probabilité $\frac{5}{6}$.
   c. La probabilité pour chaque chemin est donc de $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,116$. On en déduit que $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0,347$.

6. La loi de probabilité suivie par X est résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216} = \frac{25}{72}$	$\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

Partie B

1. Les lancers sont identiques et indépendants, pour les mêmes raisons que ci-dessus. On obtient cette fois l'arbre pondéré suivant.



X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4. Un seul chemin permet d'obtenir $X = 0$. On a donc $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.

Quatre chemins permettent d'obtenir une unique apparition de la face 6. Ces chemins correspondent tous à la même probabilité, $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$. On en déduit $P(X = 1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \approx 0,386$ La loi de probabilité de X est résumée ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

2. Dans le cas quelconque, X peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à n. Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins menant à $X = k$ est égal à $\binom{n}{k}$, car un tel chemin correspond au choix des k dés affichant un 6 parmi les n jets. Chaque chemin a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$. On en déduit que $P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$.

Bilan :

En adaptant le même raisonnement que ci-dessus à une situation où un succès S a une probabilité p et son contraire $\overline{S}$ une probabilité $1-p$, on peut écrire que la variable aléatoire X comptant le nombre d'apparitions de l'événement S lors de n répétitions identiques et indépendantes de cette expérience a pour loi de probabilité : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

Partie A

1. Le tirage d'une carte est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Une carte de carreau est apparue ». Sa probabilité est $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire correspond à la répétition de $n = 3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable

aléatoire X compte le nombre de succès lors de cette expérience aléatoire, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$.

2. En utilisant la formule $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, on obtient les valeurs suivantes.

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

3. La formule de l'espérance donne $E(X) = \frac{27}{64} \times 0 + \frac{27}{64} \times 1 + \frac{9}{64} \times 2 + \frac{1}{64} \times 3 = \frac{3}{4}$.

4. On peut conjecturer que l'espérance de X est égale au produit des paramètres de la loi binomiale soit : $E(X) = np$.

Partie B

1. Voici un exemple d'algorithme.

   NbCarreauxObtenus ← 0

   Pour chaque tirage parmi 100 tirages avec remise :

   Si un carreau est obtenu :

   NbCarreauxObtenus ← NbCarreauxObtenus + 1

   Fin Si

   Fin Pour

2. Voici un exemple de script Python.

```
from random import randint

def partie(n):
    NbCarreauxObtenus = 0
    for lancer in range(n):
        if randint(1, 4) == 1:
            NbCarreauxObtenus = NbCarreauxObtenus + 1
    return NbCarreauxObtenus

def simulation():
    N = 1000
    esperance = 0
    for experience in range(N):
        esperance = esperance + partie(100)
    return esperance/N
```

   On peut constater que l'espérance est proche de 25.

3. Il semble que l'espérance soit égale à $np = 100 \times 0,25 = 25$, ce qui conforte la conjecture de la partie A.

Bilan :

Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire X, on aura en moyenne $E(X)$ carreaux. Si X suit une loi binomiale, $E(X)$ semble être égale à np. Ce résultat est très intuitif. Appliqué à notre situation, il indique qu'en moyenne, lors d'une telle épreuve avec 100 répétitions, on obtient 25 cartes de carreau, ou dit autrement, qu'un quart des cartes obtenues sont des cartes de carreau.

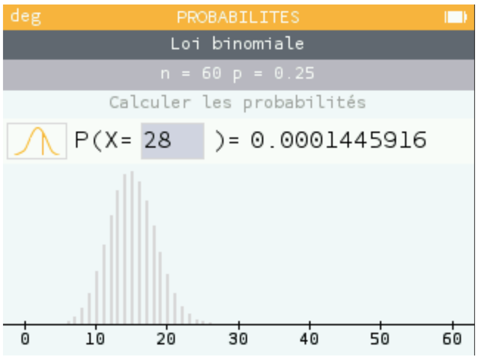
3.3 Corrigé activité C :

Questions :

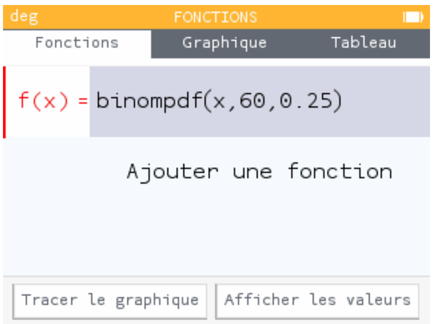
1. Le choix aléatoire d'une réponse est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La réponse est juste » de probabilité $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire correspond à la répétition de $n = 60$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 60$ et $p = 0,25$.

2. On obtient, en appliquant la formule du cours, $E(X) = np = 15$. Sur un très grand nombre de tests réalisés, un étudiant qui répond au hasard aura, en moyenne, 15 réponses exactes.

3. a. La calculatrice donne par exemple :



On peut créer une fonction de la façon suivante pour obtenir un tableau de valeurs :



b. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,95$ est $a = 20$. Un entier b tel que $P(X \geqslant b) \approx 0,95$ est $b = 10$.

c. Deux entiers c et d tels que $P(c \leqslant X \leqslant d) \approx 0,95$ sont $c = 9$ et $d = 21$. Ces résultats ne sont pas uniques : $c = 10$ et $d = 25$ conviennent également.

d. $P(9 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0,95$ signifie qu'un étudiant qui répond au hasard aura entre 9 et 22 réponses exactes avec une probabilité proche de 0,95.

Bilan :

Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1. Pour trouver deux nombres entiers a et b compris entre 0 et n, tels que $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \alpha$, on peut :

- trouver le plus grand entier a tel que $P(X < a) \approx \frac{1-\alpha}{2}$;
- trouver le plus petit entier b tel que $P(X > b) \approx \frac{1-\alpha}{2}$;
- on a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \alpha$.

Pour faire cela, un outil numérique (tableur, calculatrice, etc.) sera souvent très utile.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 10 :

On a $P(X=1)=\binom{5}{1}\times 0,2^1\times(1-0,2)^4=5\times 0,2\times 0,8^4=0,8^4$. La réponse a est donc juste. La réponse b est fausse, car $E(X)=5\times 0,2=1$. La réponse c est fausse, c'est $P(X=1)$ qui est égal au membre de droite. La réponse d est fausse, car le coefficient binomial a été oublié.

Réponse : a

Corrigé exercice 11 :

Les réponses a, b et d sont fausses, car la variable aléatoire ne donne pas un nombre de succès. La réponse c donne le nombre de succès lors de la répétition de 5 expériences de Bernoulli de succès S : « Une face paire apparaît ».

Réponse : c

Corrigé exercice 12 :

On peut vérifier que $P(X\leqslant 150)\approx 0,949$ et $P(X\leqslant 151)\approx 0,964$. La réponse c est donc vraie, les autres sont fausses.

Réponse : c

Corrigé exercice 13 :

La réponse a est fausse. On a bien $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, mais l'égalité proposée est fausse car $p^k(1-p)^{n-k}\neq p^{n-k}(1-p)^k$ si $p\neq 0,5$. La réponse b est juste, car $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$. La réponse c est fausse car, pour une loi binomiale de paramètres n et p, $V(X)=np(1-p)$. $p(1-p)$ est la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ou de paramètre $1-p$. La réponse d est fausse, car $V(X)=(1-p)E(X)$.

Réponse : b

Corrigé exercice 14 :

La réponse a est fausse, car il y a trois issues, et non pas deux. Les trois réponses b, c et d sont vraies, les trois expériences admettent pour succès respectif : « La boule est bleue », « Les deux boules sont de la même couleur" et "La boule n'est pas rouge" ».

Réponses : b, c, d

Corrigé exercice 15 :

On obtient à l'aide de la calculatrice les résultats suivants. $P(25\leqslant X\leqslant 44)\approx 0,952$ $P(32\leqslant X\leqslant 68)\approx 0,919$ $P(30\leqslant X\leqslant 72)\approx 0,970$ $P(30\leqslant X\leqslant 46)\approx 0,954$ Les réponses a et d sont donc justes, les deux autres sont fausses.

Réponses : a, d

Corrigé exercice 16 :

L'épreuve de Bernoulli de l'expérience aléatoire admet pour succès « La carte prélevée est un pique », de probabilité $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire est répétée $n = 5$ fois donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$. La réponse a est juste et la réponse c est fausse. À la calculatrice, on vérifie que $P(X \geqslant 3) \approx 0,103$. La réponse b est juste. Comme X suit une loi binomiale de paramètres n et p, $V(X) = np(1-p) = (1-p)E(X) = \frac{3}{4}E(X)$. La réponse d est donc fausse.

$\boxed{\text{Réponses : a, b}}$

Corrigé exercice 17 :

À la calculatrice, on vérifie que les trois premières affirmations a, b et c sont justes. $V(X) = np(1-p) = 15 \times 0,23 \times 0,77 \approx 2,66$. La réponse d est donc juste aussi.

$\boxed{\text{Réponses : a, b, c, d}}$

Corrigé exercice 18 :

1. L'arrivée d'un élève est une épreuve de Bernoulli de succès S : « l'élève est en retard » de probabilité $p = 0,04$. La variable aléatoire X donne le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 35$ et $p = 0,04$.

2. On obtient $P(X = 2) \approx 0,248$.

3. On obtient $P(X \leqslant 2) \approx 0,837$.

4. On obtient $E(X) = np = 1,4$. Sur un très grand nombre d'expériences, on peut donc s'attendre, en moyenne, à 1,4 élève en retard dans cette classe.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. Chaque passage de clou est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La bille tombe à droite », de probabilité $p = 0,5$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 12$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres $n = 12$ et $p = 0,5$.

2. La probabilité que la bille tombe dans la case de gauche est $P(X = 0) = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$.
La probabilité que la bille tombe dans la case n° 11 est $P(X = 11) = 12 \times \frac{1}{2^{12}} = \frac{3}{1024}$.
La probabilité que la bille tombe dans la case n° 6 est $P(X = 6) = \binom{12}{6} \frac{1}{2^{12}} = \frac{231}{1024}$.

3. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,5$. Donc $E(X) = np = 6$. En moyenne, lorsque l'on réalise un très grand nombre d'expériences, le numéro de la case dans lesquelles les billes tombent est 6.

Méthode 1

1. La probabilité d'aller à droite est de 0,5. La fonction doit donc renvoyer 1 avec une probabilité de 0,5.

```
from random import randint
def direction():
    return randint(0, 1)
```

2. La ligne 8 doit être complétée en ajoutant n car on souhaite réaliser n simulations. À la ligne 10, il faut ajouter 12 car la planche que nous simulons possède 12 rangées. À la ligne 11, il faut ajouter 1 avec une probabilité de 0,5. Pour cela, on utilise la fonction de la question précédente. On obtient donc le code suivant.

```
5  def simulation(n):
6      #liste correspondant aux 13 cases
7      cases = 13*[0]
8      for bille in range(n):
9          case_finale = 0
10         for clou in range(12):
11             case_finale = case_finale + direction()
12         cases[case_finale] = cases[case_finale] + 1
13     return cases
```

3. Les résultats sont en accord avec les réponses aux questions préliminaires car très peu de billes terminent dans la case n° 11 et la majorité terminent dans la case n° 6.

Méthode 2

1. Le fichier est disponible dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. a. Dans les cellules C5 à N5, on peut écrire =ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1). Cette fonction renvoie aléatoirement un nombre entier compris entre les deux bornes indiquées.
   b. Dans la cellule B5, on peut entrer =SOMME(C5 :N5).
3. a. Pour simuler la chute de 1000 billes, il faut étirer la ligne 5 jusqu'à la lignes 1004.
   b. Dans la cellule B2, on peut écrire =NB.SI($B$5 :$B$1004 ; B1), pour compter le nombre de billes arrivées dans la case de gauche. On peut ensuite étirer cette formule jusqu'à la cellule N2.
   c. Les résultats sont en accord avec les réponses aux questions préliminaires car très peu de billes terminent dans la case n° 11 et la majorité terminent dans la case n° 6.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. La présence ou non de chaque passager à l'embarquement est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Le passager est présent » et de paramètre $p = 0,91$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n (le nombre de billets vendus), et $p = 0,91$.
2. On suppose ici que $n = 126$.
3. a. Un problème de surréservation apparaît lorsque plus de 124 passagers se présentent à l'embarquement. Cette probabilité est très faible : $P(X > 124) \approx 9,3 \times 10^{-5}$.
   b. L'espérance de X est de $E(X) = np \approx 114,66$. En moyenne, $114,66$ passagers se présentent à l'embarquement.

Méthode 1

Voici les résultats que l'on obtient.

Nombre de billets vendus	124	125	126	127	128	129	130	131
Profit moyen	11621	11710	11796	11895	11992	12074	12169	12248

Nombre de billets vendus	132	133	134	135	136	137	138
Profit moyen	12334	12383	12443	12444	12445	12419	12372

Le nombre optimal de billets à vendre dans cette simulation est 136.

Méthode 2

1. Le fichier complété se trouve dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. Lorsque $n = 130$, le profit moyen est d'environ 12170 euros par avion.
3. On peut estimer que le nombre idéal de billets à vendre se situe entre 133 et 138.
4. En faisant des tests plus poussés, on trouve que le nombre idéal de billets à vendre est 135.

Pour aller plus loin

1. On suppose dans cette question que $n = 135$ billets ont été vendus. Soit G la variable aléatoire donnant le profit de la compagnie aérienne. On a alors $E(X) = 0,91 \times 135 = 122,85$. Si $X \leqslant 124$, alors $G = 100X + 30(n - X) = 70X + 4\,050$. D'après le chapitre 13, on a alors $E(G) = 70E(X) + 4\,050 = 12\,649,50$.

   Si $X > 124$, certains clients ne peuvent pas embarquer donc $G = 100 \times 124 + 30(n - X) - 150(X - 124) = -180X + 35\,050$.

   On a alors $E(G) = -180E(X) + 35\,050 = 12\,937$.

2. Une entreprise qui ne pratiquerait pas la surréservation vendrait 124 billets. Comme les billets ne sont pas remboursés, chaque client rapporte, présent ou non, 100 euros. Le profit associé à chaque vol est alors 12 400 euros.La pratique de la surréservation permet à la compagnie de faire un profit légèrement supérieur, et permet de soigner l'image de la société, en permettant des remboursements aux clients non présents, et en compensant financièrement les clients ne pouvant embarquer.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 19 :

Les expériences suivantes sont des exemples d'épreuves de Bernoulli.

1. Tirer une boule et regarder si elle porte le numéro 3. La probabilité de succès est de $0,2$.
2. Tirer une boule et regarder si le numéro est un nombre premier. La probabilité de succès est de $0,6$ car il y a trois nombres premiers entre 1 et 5 : 2, 3 et 5.

Les expériences suivantes ne sont pas des épreuves de Bernoulli.

1. Tirer une boule et regarder son numéro car il y a cinq issues possibles.
2. Tirer deux boules avec remise et compter le nombre de boules numérotées 1 obtenues car il peut y avoir zéro, une ou deux boules avec le numéro 1. Il y a donc trois issues possibles.

Corrigé exercice 20 :

Tirer un 7 dans un jeu de 52 cartes est une épreuve de Bernoulli de succès S « La carte est un 7 » et d'échec « La carte n'est pas un 7 ». Comme il y a quatre cartes 7 dans un jeu de 52 cartes, la probabilité du succès est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Corrigé exercice 21 :

Une urne opaque contient 87 boules noires et 13 boules rouges indiscernables au toucher. On tire une boule et on regarde sa couleur. L'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{13}{87+13} = 0,13$ et de succès S « La boule obtenue est rouge ».

Corrigé exercice 22 :

L'énoncé ne précise pas que les tirages sont indépendants. Une information qui aurait pu assurer l'indépendance est que les tirages soient fait avec remise. Dans ce cas, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{13}$.

Corrigé exercice 23 :

L'expérience aléatoire décrite est bien la répétition de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes mais la variable aléatoire Y ne donne pas le nombre de succès, plusieurs résultats sont possibles. Y ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 24 :

D'après le contexte, $P(T = 0) = 0$: en effet, en effectuant 0 lancer, il est impossible d'obtenir 5 fois le côté pile. Donc $P(T = 0) = 0$. Or, si T suit une loi binomiale, on ne peut avoir $P(T = 0) = 0$ que si la probabilité du succès est $p = 1$; ce qui n'est pas le cas ici. T ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 25 :

Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 3$ et $p = 0,1$. L'espérance de Y est $E(Y) = np = 3 \times 0,1 = 0,3$. La variance de Y est $V(Y) = np(1-p) = 3 \times 0,1 \times 0,9 = 0,27$. L'écart type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,27} = 0,3\sqrt{3} \approx 0,52$.

Corrigé exercice 26 :

D'après la représentation graphique de l'énoncé, la loi de probabilité de X est la suivante.

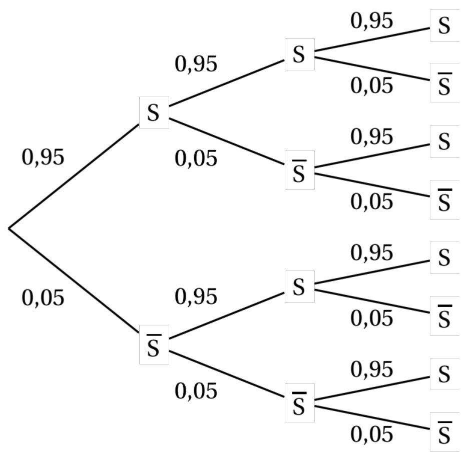
k	0	1	2	3	Total
$P(X=k)$	0,2	0,4	0,3	0,1	1

L'espérance de X est $E(X) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1 = 1,3$. Si X suivait une loi binomiale de paramètres n et p alors, d'après le tableau, $n = 3$. Pour calculer p on peut utiliser le fait que $E(X) = np$ et donc que $p = \frac{E(X)}{n} = \frac{1,3}{3} = \frac{13}{30}$. Si X suivait une loi binomiale, il faudrait que $P(X=3)$ soit égale à p^3 or ce n'est pas le cas car $p^3 \approx 0,08$ donc X ne suit pas une loi binomiale.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 27 :

1. Voici l'arbre que l'on obtient.



2. Il existe trois chemins qui mènent à un succès.

   On obtient $P(X=1) = 3 \times 0,95 \times 0,05^2 \approx 0,007$.

Corrigé exercice 28 :

En utilisant les formules du cours on obtient les résultats suivants.
$P(X=0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} = 1 \times 1 \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
$P(X=2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$

Corrigé exercice 29 :

1. L'application des formules donne :
   $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,001 + 0,027 = 0,028.$
2. Étant donné que $\{X \geqslant 2\}$ est l'événement contraire de $\{X \geqslant 1\}$, on obtient :
   $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 0,972.$

Corrigé exercice 30 :

On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'application des formules donne :
$P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3(1-p) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2} - 1.$

Corrigé exercice 31 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X = 16) \approx 0,104$
$P(X \leqslant 16) \approx 0,672$
$P(X > 16) \approx 0,328$

Corrigé exercice 32 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X = 6) \approx 0,200$
$P(X \leqslant 7) \approx 0,617$
$P(X \geqslant 5) \approx 0,953$

Corrigé exercice 33 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X > 9) \approx 0,522$
$P(X < 13) \approx 0,884$
$P(7 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,553$

Corrigé exercice 34 :

D'après la représentation graphique, $n = 5$. On a $P(X = 5) = p^5 = 0,07776$. À l'aide de la touche $\sqrt[n]{\ldots}$ de la calculatrice, on obtient $p = 0,6$. Étant donné que $p = \frac{a}{100}$ d'après l'énoncé, on obtient $a = 60$.

Corrigé exercice 35 :

Voici comment compléter le code Python.

```python
from math import factorial

def LoiDeProbabilite():
    bino = 11*[0]
    for k in range(11):
        bino[k] = factorial(10)/(factorial(k)*factorial(10-k)) * 0.7**k * (1-0.7)**(10-k)
    return bino
```

Corrigé exercice 36 :

Voici comment compléter le code Python.

```
from math import factorial

def binomFRep(n, p, k):
  # Si la v.a. suit une loi B(n,p), renvoie P(X <= k)
  s = 0
  for i in range(k+1):
    s = s + factorial(n)/(factorial(i)*factorial(n-i))*(p**i)*(1-p)**(n-i)
  return s
```

Corrigé exercice 37 :

L'espérance d'une loi binomiale X est égale au produit des paramètres n et p donc $E(X) = np = 35 \times \frac{3}{7} = 15$.
Si on reproduit un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, X est en moyenne égale à 15.

Corrigé exercice 38 :

On applique la formule de la variance d'une loi binomiale X de paramètres n et p et on obtient $V(X) = np(1-p) = 75 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 18$.
L'écart type de X est égal à $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3\sqrt{2}$.

Corrigé exercice 39 :

L'espérance de X est égale à $E(X) = np = 7,13$.
La variance de X est égale à $V(X) = np(1-p) = 5,4901$.

Corrigé exercice 40 :

L'espérance de X est égale à $E(X) = np = \frac{497}{9}$.
La variance de X est égale à $V(X) = np(1-p) = \frac{994}{81}$.

Corrigé exercice 41 :

On sait que $E(X) = 3,7$. Or X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et p, donc $E(X) = np = 5p$.
On en déduit que $p = \frac{E(X)}{5} = 0,74$.

Corrigé exercice 42 :

On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X \leqslant 8) \approx 0,76$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,87$.
Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,8$ est $a = 9$.

Corrigé exercice 43 :

On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X \geqslant 14) \approx 0,86$ et $P(X \geqslant 15) \approx 0,77$.
Donc le plus grand entier a tel que $P(X \geqslant a) \geqslant 0,8$ est $a = 14$.

Corrigé exercice 44 :

1. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,025$ est $a = 19$.
   Un entier b tel que $P(X \leqslant b) \approx 0,975$ est $b = 34$.
2. On en déduit que $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx 0,95$.

Corrigé exercice 45 :

1. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,05$ est $a = 88$. Un entier b tel que $P(X \leqslant b) \approx 0,95$ est $b = 111$.
2. On en déduit que $P(a < X \leqslant b) \approx 0,9$.

Corrigé exercice 46 :

1. On peut entrer la formule « =LOI.BINOMIALE(A2 ; 5 ; 0,4 ; 0) ».La commande « =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 0) » permet d'obtenir $P(X = k)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. On peut entrer la formule « =LOI.BINOMIALE(A4 ; 5 ; 0,4 ; 1) ». La commande « =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 1) » permet d'obtenir $P(X \leqslant k)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On peut également utiliser la commande « =SOMME(B2 :B4) ».

Corrigé exercice 47 :

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$:

- si $n = 23$, $P(X \leqslant 5) \approx 0,054$
- si $n = 24$, $P(X \leqslant 5) \approx 0,040$

Le plus grand entier n tel que $P(X \leqslant 5) \geqslant 0,05$ est $n = 23$.

Corrigé exercice 48 :

Dans une ville imaginaire, les élèves arrivent jusqu'au baccalauréat sans avoir redoublé avec une probabilité égale à 0,83. Si on considère des classes de $n = 35$ élèves, dont on supposera les parcours scolaires totalement indépendants les uns des autres, quel est le nombre moyen d'élèves n'ayant jamais redoublé ?

Corrigé exercice 49 :

Chaque heure de ses 35 heures de travail de la semaine, Tania est appelée au téléphone par la direction de l'entreprise avec une probabilité de 0,18. On suppose que les différents appels sont indépendants les uns des autres. Quelle est la probabilité que Tania soit appelée au moins 10 fois dans une semaine ?

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 50 :

Une partie de Clémentine est une expérience aléatoire, avec deux issues : un succès S « Clémentine gagne la partie » de probabilité 0,71 et un échec, le contraire de S, de probabilité 0,29. Une partie de Clémentine est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre 0,71.

Corrigé exercice 51 :

1. Loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p=0,6$	$p=0,4$

2. L'espérance de X est égale à $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p=0,4$. La variance de X est égale à $V(X)=(0-p)^2\times(1-p)+(1-p)^2\times p=(p^2+p-p^2)(1-p)=p(1-p)=0,24$.

Corrigé exercice 52 :

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p donc $V(X)=p(1-p)$. $V(X)=\frac{6}{49}$ implique que $p(1-p)=\frac{6}{49}$ soit $p^2-p+\frac{6}{49}=0$. Les racines de ce trinôme du second degré sont $\frac{1}{7}$ et $\frac{6}{7}$. Les deux valeurs possibles de p sont donc $\frac{1}{7}$ et $\frac{6}{7}$.

Corrigé exercice 53 :

1. Oui, c'est une épreuve de Bernoulli. Mais il n'y a pas ici besoin de considérer une répétition d'épreuves de Bernoulli.

2. Oui, on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès lors de la répétition de $n=10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « La boule tirée est noire » de paramètre $p=\frac{1}{2}$. X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{2}$. L'événement considéré correspond à $X=3$.

3. Oui, mais il n'y a pas ici besoin de considérer une répétition d'épreuves de Bernoulli.

4. Oui. Le succès est « Une boule noire est obtenue ». Si on note S_k l'événement « Une boule noire est obtenue au k-ème tirage », la probabilité de l'événement présenté est $P(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3}\cap\overline{S_4}\cap S_5)$.

5. Oui, on considère la variable aléatoire Y donnant le nombre de succès lors de la répétition de $n=10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « La boule tirée est rouge » de paramètre $p=\frac{3}{8}$. Y suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{3}{8}$. L'événement considéré correspond à $Y\leqslant 5$.

Corrigé exercice 54 :

1. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« Le véhicule est électrique » et « Le véhicule n'est pas électrique »).

2. Non car il y a plus de deux issues.
3. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« L'immatriculation se termine par un Z » et « L'immatriculation ne se termine pas par un Z »).
4. Non car il y a plus de deux issues.
5. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« La longueur est inférieure ou égale à 450 cm » et « La longueur est strictement supérieure à 450 cm »).

Corrigé exercice 55 :

1. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{7}{28} = 0,25$.
2. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{5}{14}$ (on rappelle que 0 est un nombre pair).
3. Non, il y a plus de deux issues.
4. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{21}{28} = 0,75$.

Corrigé exercice 56 :

Prendre une carte de fidélité au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La carte de fidélité est celle du magasin », de probabilité $0,2$ et un échec, le contraire de S, de probabilité $0,8$. Prendre une carte de fidélité au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $0,2$.

Corrigé exercice 57 :

Piocher une boule au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La boule n'est pas noire », de probabilité $0,95$ et un échec $\overline{S}$, « La boule est noire » de probabilité $0,05$.
Piocher une boule au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $0,95$.

Corrigé exercice 58 :

Retourner une seconde carte au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La seconde carte représente un palmier » de probabilité $\frac{1}{15}$, et un échec $\overline{S}$, « La seconde carte ne représente pas un palmier » de probabilité $\frac{14}{15}$. Retourner une seconde carte au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $\frac{1}{15}$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 59 :

1. La réponse correcte est la réponse a. En utilisant la formule du cours on obtient : $P(X=1)=\binom{10}{1}\times 0,6^1\times(1-0,6)^{10-1}=\binom{10}{1}\times 0,6\times(0,4)^9$.

2. La réponse correcte est la réponse d. $\{X\geqslant 1\}$ est l'événement contraire de $\{X=0\}$ donc $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$. On obtient $P(X\geqslant 1)=1-\binom{10}{0}\times 0,6^0\times(1-0,6)^{10-0}=1-0,4^{10}$.

Corrigé exercice 60 :

On obtient, à l'aide de la calculatrice pour les questions 1 et 2 et en utilisant les formules du cours pour les questions 3 et 4, les valeurs suivantes.

1. $P(X=5)\approx 0,182$
2. $P(X\leqslant 5)\approx 0,758$
3. $E(X)=5\times 0,17=0,85$
4. $V(X)=5\times 0,17\times(1-0,17)=0,7055$

Corrigé exercice 61 :

En testant différentes valeurs de k à la calculatrice, on constate que la probabilité $P(X=k)$ est maximale pour $k=5$. On obtient alors $P(X=5)\approx 0,225$.

Corrigé exercice 62 :

1. Faux sauf si $p=1$, c'est-à-dire si le succès est certain.
2. Vrai car la variable aléatoire ne prend que des valeurs positives ou nulles.
3. Vrai car $E(X)=np$ et $n\geqslant 0$.
4. Vrai car $E(X)=np$ et $p\geqslant 0$.
5. Vrai car $V(X)=np(1-p)$ et $p(1-p)\geqslant 0$.
6. Faux. Par exemple, si $p=0,5$, $V(X)=0,25n$, alors que, si $p=1$, $V(X)=0<0,25n$.

Corrigé exercice 63 :

Les différents jets de dés sont indépendants. Sachant que les 6 premiers jets ont donné un 1, la probabilité d'obtenir $X=7$ est égale à la probabilité d'avoir un 1 au dernier jet, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$. Le fait que les 6 premiers jets de dé ont donné un 1 n'influe pas sur la probabilité d'obtenir un 1 au septième jet.

Corrigé exercice 64 :

1. Cela signifie que les événements « Le feux est vert » sont indépendants.

2. L'arrivée à un passage piéton est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le feu est vert » et de paramètre $p = 0,4$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de feux verts rencontrés.

   Y donne le nombre de succès lors de la répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.

   On obtient $P(Y = 4) = 0,4^4 = 0,0256$.

   La probabilité d'avoir tous les feux au vert vaut donc $0,0256$.

3. En utilisant les formules, on obtient $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^3 = 0,3456$ et $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^2 = 0,3456$.

   Les deux événements ont donc la même probabilité de survenir.

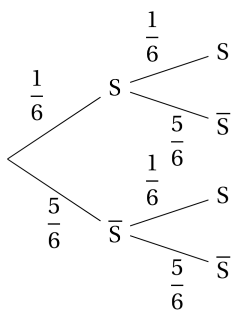
Corrigé exercice 65 :

1. Chaque lancer de dé est une épreuve de Bernoulli de succès « Le résultat est un 5 ou un 6 » et de paramètre $p = \frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors de la répétition des $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. D'après l'énoncé, « l'elfe terrasse le troll » correspond à l'événement $\{X \geqslant 3\}$, dont la probabilité (qui peut être calculée à la calculatrice) est $P(X \geqslant 3) \approx 0,210$.

2. Pour cette question, on peut :

   - utiliser une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$, puis calculer la probabilité d'avoir au moins un succès ;
   - utiliser directement un arbre pondéré et calculer la probabilité de l'événement recherché.

   Soit S le succès d'un lancer de dé, c'est-à-dire « Le résultat est 6 ». On obtient l'arbre suivant.



   Il existe trois chemins menant à au moins un succès. La probabilité de neutraliser le troll en utilisant une attaque spéciale est donc de $\frac{11}{36} \approx 0,306$.

3. L'attaque spéciale est donc plus avantageuse que l'attaque standard.

Corrigé exercice 66 :

1. Soient X la variable aléatoire donnant le nombre d'as tirés et G le gain algébrique de Tatiana. Chaque tirage de carte est une épreuve de Bernoulli de succès S « La carte tirée est un as » et de paramètre $p = \frac{1}{8}$. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{8}$. On en déduit la loi de probabilité de G.

g_i	-5	5	45
$P(G = g_i)$	$0,5862$	$0,4136$	$0,0002$

L'espérance de G est donc $E(G) \approx -5\times 0,5862+5\times 0,4136+45\times 2\times 10^{-4} \approx -0,85$. Comme cette espérance est strictement négative, ce jeu n'est pas équitable et est en défaveur de Tatiana.

2. Dans le cas général, la loi de probabilité de G est la suivante.

g_i	-5	5	$m-5$
$P(G = g_i)$	$0,5862$	$0,4136$	$0,0002$

L'espérance de G vaut alors $E(G) = -0,864 + 0,0002m$. Ce résultat devient strictement positif si $m > 4320$. Le jeu devient donc favorable à Tatiana si $m > 4320$.

Corrigé exercice 67 :

On rappelle la formule des probabilités conditionnelles : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

1. On obtient $P_{X\leqslant 10}(X = 9) = \frac{P((X=9)\cap(X\leqslant 10))}{P(X\leqslant 10)} = \frac{P(X=9)}{P(X\leqslant 10)}$. Puis à l'aide de la calculatrice $P_{X\leqslant 10}(X = 9) \approx \frac{0,1154}{0,8957} \approx 0,129$.

2. On obtient $P_{X>5}(X < 15) = \frac{P(5<X<15)}{P(X>5)}$ qui peut se réécrire de la manière suivante $P_{X>5}(X < 15) = \frac{P(6\leqslant X\leqslant 14)}{P(X\geqslant 6)}$. Puis à l'aide de la calculatrice $P_{X>5}(X < 15) \approx \frac{0,7479}{0,7522} \approx 0,9942$.

Corrigé exercice 68 :

En utilisant la calculatrice et la formule des probabilités totales, on obtient les résultats suivants.

1. $P(X = 13) \approx 0,184$
2. $P(X < 15) \approx 0,755$
3. $P(7 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0,753$
4. $P_{X<15}(X = 13) = \frac{P((X=13)\cap(X<15))}{P(X<15)} = \frac{P(X=13)}{P(X<15)} \approx \frac{0,184}{0,755} \approx 0,244$
5. Si X est compris dans l'intervalle $[7; 14]$ alors il est nécessairement plus petit que 15 donc $P_{7\leqslant X\leqslant 14}(X < 15) = 1$.
6. $P_{X<15}(7 \leqslant X \leqslant 14) = \frac{P(7\leqslant X\leqslant 14)}{P(X<15)} \approx 0,998$

Corrigé exercice 69 :

1. Chaque lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le côté Face est obtenu » et de probabilité $p = 0,5$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de face obtenues lors de la répétition de n lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$. L'événement contraire de « Obtenir au moins un face » est l'événement « Obtenir 0 face » dont la probabilité vaut $0,5^n$. On obtient donc $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,5^n$.

2. Voici un exemple d'algorithme :

   $n \leftarrow 0$

   Tant que $1 - 0,5^n < 0,9999$, faire :

   $\quad n \leftarrow n + 1$

   Fin Tant que

   Renvoyer n

3. Voici la version Python de cet algorithme.

```python
def lancers():
  n = 0
  while 1 - 0.5**n < 0.9999:
    n = n + 1
  return n
```

Corrigé exercice 70 :

1. Le choix d'une plage par un touriste est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le touriste choisit la place à l'est » et de probabilité $p = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

2. a. Si deux touristes sont heureux, il y a deux plages avec exactement un touriste. Or on sait que $n \geqslant 3$ et qu'il n'y a que deux plages. Il est donc impossible qu'il y ait deux touristes heureux.

   b. Si $n = 3$, « Il y a un touriste heureux » signifie soit qu'il y a un touriste sur la place à l'est (ce qui correspond à l'événement $\{X = 1\}$) soit qu'il y a un touriste sur la plage à l'ouest (ce qui correspond à l'événement $\{X = 2\}$). Ces deux événements ont la même probabilité qui vaut $P(X = 1) = P(X = 2) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2^3}$. Donc la probabilité qu'un touriste soit heureux vaut $P(X = 1) + P(X = 2) = 2 \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^2} = 0,75$.

   c. « Il y a un touriste heureux » correspond à la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 1\}$ et $\{X = n - 1\}$. Ces deux événements ont la même probabilité qui est égale à : $P(X = 1) = P(X = n-1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$. Donc la probabilité qu'un touriste soit heureux est bien égale à : $P(X = 1) + P(X = n - 1) = 2 \times \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

   d. Pour $n = 10$, la probabilité pour qu'un touriste soit heureux est égale à $\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{10}{2^9} \approx 0,02$.

Corrigé exercice 71 :

Le succès à chaque tirage de boules peut être défini comme une épreuve de Bernoulli, de succès « La boule est rouge ». La variable aléatoire compte le nombre de succès lors de la répétition de ces épreuves de Bernoulli. Mais la loi suivie par X n'est pas binomiale car chaque tirage modifie le contenu de l'urne (puisque le tirage est sans remise) et les épreuves de Bernoulli ne sont donc pas identiques ni indépendantes.

Corrigé exercice 72 :

La variable aléatoire Y ne compte pas le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 73 :

1. Oui, $n = 1$ et $p = \frac{1}{16}$.
2. Non, on ne compte pas un nombre de succès.
3. Oui, $n = 7$ et $p = \frac{2}{3}$.
4. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.
5. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.
6. Oui, $n = 4$ et $p = \frac{1}{4}$.
7. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes.
8. Oui, $n = 100$ et $p = 0,93$ (en supposant que les personnes se présentent indépendamment les unes des autres).
9. Non, la variable aléatoire ne compte pas un nombre de succès.
10. Oui, $n = 3$ et $p = \frac{4}{11}$.
11. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes. Cependant, dans la pratique, l'hypothèse sera souvent faite qu'un tirage ne modifie par le contenu de l'urne de manière importante (car la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 100 000 pièces est presque égale à la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 99 999 pièces). Si on accepte cette approximation, le tirage peut donc être assimilé à un tirage avec remise. X suit alors une loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 3$ et $p = 0,01$.

Corrigé exercice 74 :

1. On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X = 11) \approx 0,125$.

   $P(X = 13,5) = 0$ car X ne prend que des valeurs entières positives.

   $P(X = -1) = 0$ car X ne prend que des valeurs entières positives.

2. $P(X \leqslant 12) \approx 0,522$.
   $P(X > 17) = 1 - P(X \leqslant 17) \approx 0,044$.
3. $P(10 < X \leqslant 20) = P(9 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,734$.
   $P(7,8 \leqslant X < 9) = P(X = 8) \approx 0,046$.
4. $E(X) = np = 40 \times 0,31 = 12,4$
   $V(X) = np(1-p) = 40 \times 0,31 \times (1 - 0,31) = 8,556$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,925$

Corrigé exercice 75 :

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants. L'ordre prédit par chaque joueur est une épreuve de Bernoulli, de succès S « L'ordre prédit est le bon » et de paramètre $p = \frac{1}{116\,280}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 80\,000$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 80\,000$ et $p = \frac{1}{116\,280}$. Son espérance est égale à $E(X) = np = 80\,000 \times \frac{1}{116\,280} = \frac{2\,000}{2\,907} \approx 0,688$. Sur un très grand nombre de courses, le nombre moyen de gagnants parmi les joueurs est égal à l'espérance de X, c'est-à-dire 0,69 en arrondissant au centième.

Corrigé exercice 76 :

Les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X sont des entiers compris entre 0 et 6. Donc $n = 6$. Comme on dispose de la loi de probabilité, une méthode pour retrouver le paramètre p consiste à utiliser l'espérance de X. X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc $E(X) = np = 6p$. Or d'après le tableau, $E(X) = 0 \times \frac{64}{15\,625} + 1 \times \frac{576}{15\,625} + 2 \times \frac{432}{3\,125} + \ldots + 6 \times \frac{729}{15\,625} = 3,6$. On en déduit que $p = \frac{E(X)}{6} = 0,6$. On vérifie que les différentes probabilités dans le tableau correspondent bien à une loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0,6)$ et on en conclut donc que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,6$.

Corrigé exercice 77 :

Lorsqu'elle gagne, Yasmine a dépensé 1 € pour ensuite gagner 3 €. Son gain est donc de 2 € sur une partie. Le gain maximal de Yasmine est donc égal à 8 €. Le gain minimal de Yasmine est égal à –40 €. Chaque coup à la roulette est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le rouge sort » et de paramètre $p = \frac{18}{37}$. À la roulette, les résultats successifs obtenus sont indépendants. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 40$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{18}{37}$. Son espérance est $E(X) = np = 40 \times \frac{18}{37} = \frac{720}{37}$. G est égal à $3X - n$. On en déduit le gain algébrique moyen : $E(G) = 3 \times \frac{720}{37} - 40 = \frac{680}{37} \approx 18,378\,3$. Le gain algébrique moyen est égal à 18,38 €, arrondi au centième près.

Corrigé exercice 78 :

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors l'espérance de X vaut $E(X) = np$ et sa variance vaut $V(X) = np(1-p)$. L'énoncé nous permet d'aboutir au système d'équations d'inconnues n et p : $\begin{cases} np = 19,2 \\ np(1-p) = 3,84 \end{cases}$. En substituant np par 19,2 dans la seconde équation, nous arrivons à l'équation d'inconnue p suivante $19,2(1-p) = 3,84$. On en déduit que $p = 1 - \frac{3,84}{19,2} = 0,8$. Avec la première équation, on déduit alors que $n = \frac{19,2}{0,8} = 24$. Une loi binomiale de paramètres $n = 24$ et $p = 0,8$ vérifie les deux conditions sur l'espérance et la variance de l'énoncé. Donc X peut suivre une loi binomiale.

Corrigé exercice 79 :

Supposons que X suive une loi binomiale. Avec le même raisonnement que dans l'exercice précédent, on arrive à la conclusion que ses paramètres valent $n = 62,4$ et $p = 0,3$. Cependant, pour une loi binomiale, n doit être un entier. On arrive donc à une contradiction. On vient de montrer par l'absurde que X ne peut pas suivre une loi binomiale.

Corrigé exercice 80 :

1. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès S « La cible est touchée » et de paramètre $p = \frac{3}{4} = 0,75$. La variable aléatoire C compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 60$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc C suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 60$ et $p = 0,75$.

2. L'événement « Sven touche au moins 50 fois la cible » correspond à $C \geqslant 50$. On obtient avec la calculatrice $P(C \geqslant 50) \approx 0,0859$. L'arrondi au millième de la probabilité que Sven touche au moins 50 fois la cible pendant la séance est égale à 0,086.

Corrigé exercice 81 :

1. Une journée sans intervention correspond à l'événement $\{X = 0\}$ dont la probabilité est de $P(X = 0) \approx 0,262$.

2. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$ donc $E(X) = np = 6 \times 0,2 = 1,2$. En moyenne, sur un très grand nombre de jours, il y a donc 1,2 intervention par jour.

3. Il s'agit ici d'un calcul de probabilités conditionnelles.

   $P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{P((X\geqslant 3)\cap(X\geqslant 1))}{P(X\geqslant 1)} = \frac{P(X\geqslant 3)}{P(X\geqslant 1)} \approx 0,134$ Sachant qu'il y a déjà eu une intervention ce matin, la probabilité, qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui est d'environ 0,134.

Corrigé exercice 82 :

1. La formule « =ENT(ALEA()+0,7) » permet de simuler une expérience aléatoire suivant une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$.

   La formule « =NB.SI(G2 :G101 ;0) » compte le nombre de cellules dans la plage G2 :G101 contenant 0.

2. D'après la formule de la cellule J2, les simulations vont de la ligne 2 à la ligne 101 : il y en a donc 100. Ce résultat est confirmé par le nombre en face de « Total ».

3. D'après les réponses de la question 1, Dominique a simulé une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 5$ et $p = 0,7$.

4. On peut déduire que le résultat de la cellule J2 est $100-(4+16+25+35+20) = 0$. On obtient ainsi la moyenne pondérée $\overline{m} = \frac{0\times0+1\times4+2\times16+3\times25+4\times35+5\times20}{100} = 3,51$. Ce résultat est proche de l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, qui vaut $n \times p = 3,5$, il n'est donc pas surprenant.

Corrigé exercice 83 :

1. La ligne 8 permet de commencer une boucle, pour répéter cinq épreuves de Bernoulli, de manière identique et indépendante. L'instruction « random()<= p » permet de simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre p (avec $p = 0,7$ dans ce cas). À la ligne 11, l'instruction « If » placée en début de ligne introduit une structure conditionnelle : s'il y a eu au moins 3 succès dans le schéma de Bernoulli, le compteur « c » sera incrémenté la ligne suivante. La ligne 14 renvoie la valeur de « c » qui compte le nombre de simulations (parmi 100) où le nombre de succès a été supérieur ou égal à 3.

2. Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$, ce programme renvoie une valeur approchée de $100 \times P(X \geqslant 3)$ c'est-à-dire environ 84.

Corrigé exercice 84 :

1. Si le joueur ne prélève aucune boule noire, il perd 1 euro, soit un gain algébrique de -1 euro. Si le joueur tire respectivement 1, 2, 3 ou 4 boules noires, il gagne respectivement 0, 1, 2 ou 3 euros.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. On a $G = X - 1$ (car la mise de départ est de 1 euro). Le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli de succès S « La boule tirée est noire » et de paramètre $p = 0,25$. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,25$. La probabilité que le joueur perde 1 euro est donc de$P(G = -1) = P(X = 0) = (1 - 0,25)^4 = \frac{81}{256} \approx 0,316$.

3. La probabilité d'obtenir le gain maximal, c'est-à-dire 3 euros, est :

   $P(G = 3) = P(X = 4) = (0,25)^4 = \frac{1}{256} \approx 0,004$.

4. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ donc l'espérance de X est :

   $E(X) = np = 4 \times 0,25 = 1$.

   L'espérance du gain est $E(G) = E(X) - 1 = 0$ donc le jeu est équitable.

Corrigé exercice 85 :

La probabilité d'obtenir un pile au deuxième lancer est égale à la probabilité d'obtenir deux pile de suite, c'est-à-dire à 0,25. Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le deuxième lancer a donné un pile » de probabilité $p = \frac{1}{4}$. La variable aléatoire

X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $p = \frac{1}{4}$. Son espérance est $E(X) = np = \frac{n}{4}$. Sa variance est $V(X) = np(1-p) = \frac{3n}{16}$.

Corrigé exercice 86 :

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs cassés dans l'année. Chaque gâteau fait est une épreuve de Bernoulli de succès S « Un œuf est cassé » de probabilité $p = 0,6$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de 52 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0,6$. En moyenne, Maxime casse chaque année $E(X) = np = 52 \times 0,6 = 31,2$ œufs. En moyenne, Maxime aura besoin chaque année de $52 + E(X) = 52 + 52 \times 0,6 = 83,2$ œufs.

Corrigé exercice 87 :

1. Pour résoudre l'exercice, et sans perte de généralité, appelons Aurélie et Bianca les deux jumelles. Notons A et B les variables aléatoires donnant le nombre respectif de balades avec leur père dans l'année d'Aurélie et Bianca. A et B suivent les lois binomiales de paramètres $n = 365$ et $p = 0,5$, telles que $A + B = 365$ (soit $B = 365 - A$). Il n'y a pas injustice lorsque $B - 6 \leqslant A \leqslant B + 6$ c'est-à-dire, en utilisant l'égalité précédente, $179,5 \leqslant A \leqslant 185,5$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(179,5 \leqslant A \leqslant 185,5) = P(180 \leqslant A \leqslant 185) \approx 0,246$ La probabilité qu'il y ait une injustice est donc de $p \approx 0,754$.

2. Notons Y le nombre d'années où il y a une injustice sur cette période de 20 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p \approx 0,754$. La probabilité qu'il y ait plus de 3 injustices sur cette période de 20 ans est $P(Y > 3) = P(Y \geqslant 4) \approx 1$. Il est donc quasiment certain qu'il y ait plus de trois injustices au bout de 20 ans.

Corrigé exercice 88 :

D'après le cours, si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On veut montrer que $E(X) = np$.

1. $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!}$ $k\binom{n}{k} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2. D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire et en utilisant l'égalité

précédente on a :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

3. On procède au changement d'indice $i = k-1$ et on obtient :
   $E(X) = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1}$
   $E(X) = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}$
4. D'une part, $(p+(1-p))^{n-1} = 1^{n-1} = 1$. D'autre part, en utilisant l'indication fournie, avec $a = p$ et $b = 1-p$, il vient $1 = (p+(1-p))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}$. Donc $E(X) = np \times 1 = np$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 89 :

On remarque c'est à partir de $k = 28$ que $P(X \leqslant k)$ est plus grand que 0,25. La réponse est donc $k = 28$.

Corrigé exercice 90 :

On remarque c'est à partir de $k = 36$ que $P(X \leqslant k)$ est plus grand que 0,95. La réponse est donc $k = 36$.

Corrigé exercice 91 :

1. $a = 22$
2. $b = 37$
3. $(a; b) = (22; 36)$ car $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a) \approx P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$
   $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx 0,975 - 0,025 = 0,95$.

Corrigé exercice 92 :

1. $a = 25$ et $b = 36$. On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant 36) - P(X \leqslant 24) \approx 0,901$ d'après le tableau.
2. $(a; b) = (26; 33)$ ou $(a; b) = (27; 34)$ ou $(a; b) = (28; 35)$.

P(k<=X<=k')	k'	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	P(X<=k')	0,008	0,0172	0,0328	0,0583	0,0972	0,1526	0,2257	0,3154	0,4177	0,5262	0,6331	0,7309	0,8139	0,8791	0,9266	0,9584	0,9781	0,9894	0,9953	0,9981
k	P(X<k)																				
22	0,008	0	0,0092	0,0248	0,0503	0,0892	0,1446	0,2177	0,3074	0,4097	0,5182	0,6251	0,7229	0,8059	0,8711	0,9186	0,9504	0,9701	0,9814	0,9873	0,9901
23	0,0172		0	0,0156	0,0411	0,08	0,1354	0,2085	0,2982	0,4005	0,509	0,6159	0,7137	0,7967	0,8619	0,9094	0,9412	0,9609	0,9722	0,9781	0,9809
24	0,0328			0	0,0255	0,0644	0,1198	0,1929	0,2826	0,3849	0,4934	0,6003	0,6981	0,7811	0,8463	0,8938	0,9256	0,9453	0,9566	0,9625	0,9653
25	0,0583				0	0,0389	0,0943	0,1674	0,2571	0,3594	0,4679	0,5748	0,6726	0,7556	0,8208	0,8683	0,9001	0,9198	0,9311	0,937	0,9398
26	0,0972					0	0,0554	0,1285	0,2182	0,3205	0,429	0,5359	0,6337	0,7167	0,7819	0,8294	0,8612	0,8809	0,8922	0,8981	0,9009
27	0,1526						0	0,0731	0,1628	0,2651	0,3736	0,4805	0,5783	0,6613	0,7265	0,774	0,8058	0,8255	0,8368	0,8427	0,8455
28	0,2257							0	0,0897	0,192	0,3005	0,4074	0,5052	0,5882	0,6534	0,7009	0,7327	0,7524	0,7637	0,7696	0,7724
29	0,3154								0	0,1023	0,2108	0,3177	0,4155	0,4985	0,5637	0,6112	0,643	0,6627	0,674	0,6799	0,6827
30	0,4177									0	0,1085	0,2154	0,3132	0,3962	0,4614	0,5089	0,5407	0,5604	0,5717	0,5776	0,5804
31	0,5262										0	0,1069	0,2047	0,2877	0,3529	0,4004	0,4322	0,4519	0,4632	0,4691	0,4719
32	0,6331											0	0,0978	0,1808	0,246	0,2935	0,3253	0,345	0,3563	0,3622	0,365
33	0,7309												0	0,083	0,1482	0,1957	0,2275	0,2472	0,2585	0,2644	0,2672
34	0,8139													0	0,0652	0,1127	0,1445	0,1642	0,1755	0,1814	0,1842
35	0,8791														0	0,0475	0,0793	0,099	0,1103	0,1162	0,119
36	0,9266															0	0,0318	0,0515	0,0628	0,0687	0,0715
37	0,9584																0	0,0197	0,031	0,0369	0,0397
38	0,9781																	0	0,0113	0,0172	0,02
39	0,9894																		0	0,0059	0,0087
40	0,9953																			0	0,0028
41	0,9981																				0

Corrigé exercice 93 :

On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 21) \approx 0,57$ et $P(X \leqslant 22) \approx 0,72$. Le plus petit nombre entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,6$ est donc $k = 22$.

Corrigé exercice 94 :

On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 30) \approx 0,54$ et $P(X \leqslant 31) \approx 0,63$. Le plus grand nombre entier k tel que $P(X \leqslant k) \leqslant 0,6$ est donc $k = 30$.

Corrigé exercice 95 :

1. On trouve grâce à la calculatrice que $a = 8$ et $b = 21$.
2. On a $P(8 < X \leqslant 21) = P(X \leqslant 21) - P(X \leqslant 8)$ d'où $P(8 < X \leqslant 21) \approx 0,95$ puisque les valeurs de a et b ont été choisies de telle sorte que $P(X \leqslant 8) \approx 0,025$ et $P(X \leqslant 21) \approx 0,975$.

Corrigé exercice 96 :

On résume les différentes possibilités dans le tableau suivant.

k	$P(X_1 > k)$	$P(X_2 < k)$
0	0,344	0
1	0,052	0,000006
2	0,004	0,00014
3	0,0001	0,0016
4	0	0,0106
5	0	0,047
6	0	0,150
7	0	0,350
8	0	0,617
9	0	0,851
10	0	0,972
11	0	1

On constate donc que $P(X_1 > k) \leqslant P(X_2 < k)$ si, et seulement si, $k \geqslant 3$.

Corrigé exercice 97 :

1. Le choix d'un élève est une épreuve de Bernoulli de succès S « L'élève est gaucher » de probabilité $p = 0,127$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques (car le choix de l'élève se fait avec remise) et indépendantes. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,127$.
2. On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 7) \approx 0,93$ et $P(X \leqslant 8) \approx 0,97$.Le plus entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,95$ est donc 8.
3. Il y a une probabilité supérieure ou égale à 95 % d'avoir 8 gauchers ou moins dans une classe de 35 élèves. On ne peut pas affirmer qu'il est exceptionnel de trouver 7 gauchers dans une classe.

Corrigé exercice 98 :

1. À l'aide de la calculatrice on obtient $a = 177$ et $b = 191$.
2. Si le taux de satisfaction est égal à 92 %, la probabilité que, lors d'un sondage aléatoire de 200 personnes, le nombre de personnes satisfaites soit compris entre 177 et 191 est proche de 0,95. Comme $173 < a$, on peut remettre en cause le taux de satisfaction présenté dans la bande-annonce.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 99 :

1. Le prélèvement de chaque pièce est une épreuve de Bernoulli de succès S « La pièce est défectueuse » de paramètre $p = 0,05$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 20$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 20$ et $p = 0,05$. La probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse est $P(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0,05^0 \times (1 - 0,05)^{20} \approx 0,36$. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0,05^1 \times (1 - 0,05)^{19} \approx 0,38$.

2. La probabilité qu'au plus trois pièces soient défectueuses est $P(X \leqslant 3) \approx 0,98$.

3. X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc son espérance est $E(X) = np = 20 \times 0,05 = 1$. En moyenne, sur un très grand nombre de lots de 20 pièces, une pièce par lot est défectueuse.

Corrigé exercice 100 :

1. Le contrôle d'une pièce est une épreuve de Bernoulli de succès « La pièce est défectueuse » de paramètre $p = 0,04$. On peut considérer que les différentes épreuves de Bernoulli sont identiques et indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans une boîte. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 25$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,04$ donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,04)$. L'événement « Une boîte est non conforme » correspond à l'événement $X \geqslant 4$. Sa probabilité est $P(X \geqslant 4) \approx 0,02$.

2. Le contrôle d'une boîte est une épreuve de Bernoulli de succès « La boîte est non conforme » de paramètre $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boîtes défectueuses. Y compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 30$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,02$ donc Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,02)$. La probabilité qu'au moins trois boîtes soient non conformes est $P(Y \geqslant 3) \approx 0,02$.

3. L'espérance de Y est égale à $E(Y) = 30 \times 0,02 = 0,6$. En moyenne, sur un grand nombre de lots de 30 boîtes, 0,6 boîte parmi les 30 sont non conformes.

Corrigé exercice 101 :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, donc son espérance est $E(X) = np$ et sa variance vaut $V(X) = np(1-p)$. Comme p appartient à $[0; 1]$, $1-p$ appartient aussi à $[0; 1]$ et donc $1 \geqslant 1-p$. De plus, comme $n > 0$, np est positif. On obtient donc $np \geqslant np(1-p)$ ce qui implique que $E(X) \geqslant V(X)$.

2. L'écart type $\sigma(X)$ de X est la racine carrée de sa variance, donc $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Pour $n = 10$ et $p = 0,9$ on a $E(X) = np = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0,95$ donc $E(X) > \sigma(X)$. Pour $n = 10$ et $p = 0,01$, $E(X) = np = 0,1$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0,31$ donc $E(X) < \sigma(X)$. L'espérance n'est donc ni toujours supérieure, ni toujours inférieure à l'écart type.

Corrigé exercice 102 :

1. a. Si le test est négatif, un seul test a été réalisé. Si le test est positif, il faut réaliser $1+5=6$ tests.

   b. La variable aléatoire X peut prendre deux valeurs : 1 et 6. En utilisant une loi binomiale, on détermine $P(X=1)=0,999^5 \approx 0,995$ et $P(X=6)=1-P(X=1)\approx 0,005$.

   c. Le nombre moyen de tests réalisés est égal à l'espérance de X soit $E(X)\approx 1\times 0,995+6\times 0,005\approx 1,025$. Si on compare cela avec la méthode standard où 5 tests sont réalisés, on économise en moyenne 3,975 tests.

2. a. Si le test est négatif, un seul test est réalisé. Si le test est positif, $1+n$ tests sont nécessaires.

   b. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tests réalisés. X_n peut prendre deux valeurs : 1 et $1+n$. Les probabilités sont $P(X_n=1)=0,999^n$ et $P(X_n=n+1)=1-P(X_n=1)=1-0,999^n$.

   c. Le nombre moyen de tests réalisés est $E(X_n)=1\times 0,999^n+(n+1)\times(1-0,999^n)=1+n-n0,999^n$. L'économie moyenne réalisée est $n-E(X_n)=n0,999^n-1$

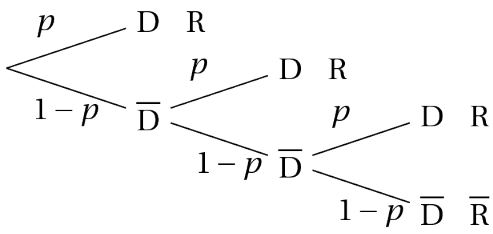
3. Minimiser le nombre de tests à pratiquer est équivalent à maximiser les économies réalisées. Si on sépare les $N=110\,880$ recrues en groupes de taille n (de sorte que N est un multiple de n), on obtient $\frac{N}{n}$ groupes. Les économies moyennes réalisées sont $\frac{N}{n}\times(0,999^n\times n-1)=N\times(0,999^n-\frac{1}{n})$. Avec un tableur, on trouve que la taille idéale des groupes est $n=32$. Cette taille permet d'identifier les malades avec en moyenne 6959 tests, au lieu de 110880.

B15 =$B$1*(0,999^A15-1/A15)

	A	B	C	D
1	N	110880		
2				
3	Taille du groupe n	Economies	Nombre de tests	
4	2	55218,35088	55661,64912	
5	3	73587,69253	37292,30747088	
6	...	...	...	
7	24	103629,2596	7250,74036760708	
8	25	103705,8104	7174,18962723948	
9	26	103768,254	7111,74602222761	
10	27	103818,1698	7061,8301736413	
11	28	103856,9117	7023,08834346764	
12	29	103885,6465	6994,35353098625	
13	30	103905,3857	6974,61434986905	
14	31	103917,0101	6962,98992906757	
15	**32**	**103921,2905**	**6958,70951978368**	
16	33	103918,9042	6961,09581026388	
17	34	103910,4488	6969,55118504186	
18	35	103896,4537	6983,54633973917	

Corrigé exercice 103 :

1. a. Soit D l'événement « L'article est défectueux » et R l'événement « Le Lot est refusé ». La situation peut-être modélisée par l'arbre pondéré suivant.



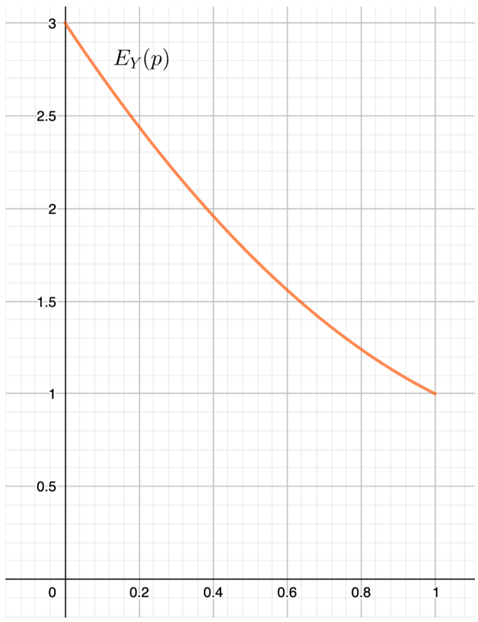
La probabilité de refuser le lot $P(R)$ est obtenue en calculant la probabilité de son événement contraire, $\overline{R}$. Par lecture de l'arbre on obtient $P(\overline{R}) = (1-p)^3$ et donc $P(R) = 1-(1-p)^3$.

b. La loi de probabilité suivie par Y est résumée dans le tableau ci-dessous.

y_i	1	2	3	Total
$P(Y=y_i)$	p	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	1

L'espérance de Y est égale à : $E(Y) = 1\times p + 2\times p(1-p) + 3\times(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3$. Pour confirmer la cohérence de ce résultat, vérifions les deux cas extrêmes. Si $p=0$ (aucun produit défectueux) alors $E(Y)=3$. On vérifie toujours 3 produits, puis on accepte le lot. Si $p=1$ (tous les produits défectueux) alors $E(Y)=1$. Le premier produit est défectueux et le lot est refusé.

2. Avec cette méthode, on prélève toujours 3 articles. Avec la méthode étudiée à la la question 1, le nombre moyen de prélèvements est donné par l'espérance de Y. Voici la valeur de $E(Y)$ en fonction de la valeur de $p \in [0;1]$.



La première méthode permet d'autant plus d'économies que p est proche de 1.

Corrigé exercice 104 :

1. Le comportement de chaque client est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le client se présente à l'embarquement » et de paramètre $p = 0,9$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors de la répétition des $n = 125$ épreuves de

Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 125$ et $p = 0,9$. L'événement « tous les passagers qui se présentent peuvent monter à bord » correspond à $X \leqslant 120$, dont la probabilité vaut $P(X \leqslant 120) \approx 0,996\,1$.

2. L'événement « Il reste des places libres à bord » correspond à $\{X \leqslant 119\}$ dont la probabilité vaut $P(X \leqslant 119) \approx 0,9886$.
3. Comme X suit une loi binomiale, on a $E(X) = np = 125 \times 0,9 = 112,5$. Le nombre moyen de passagers se présentant à l'embarquement est $E(X) = 112,5$.
4. En utilisant un tableur, on vérifie que la probabilité de devoir refuser un passager vaut 0,025 si on vend 127 billets, et qu'elle est légèrement supérieure à 0,05 si on vend 128 billets. La compagnie aérienne peut donc vendre jusqu'à 127 billets par vol avec la contrainte qu'elle s'est fixée.

Corrigé exercice 105 :

Calcul de p_X :
D'après le graphe, on a $P(X = 0) = 0,086$. Or $P(X = 0) = \binom{11}{0} \times (p_X)^0 \times (1 - p_X)^{11-0} = (1 - p_X)^{11}$ On en déduit que $1 - p_X \approx 0,8$ à l'aide de la calculatrice et donc que $p_X \approx 0,2$.
Calcul de p_Y :
D'après le graphe, on a $P(Y = 11) = 0,020$. Or $P(Y = 11) = \binom{11}{11} \times (p_Y)^{11} \times (1 - p_Y)^0 = (p_Y)^{11}$. On en déduit que $p_Y \approx 0,7$ à l'aide de la calculatrice.
Calcul de p_Z :
L'étude de la probabilité $P(Z = 6)$ donne une équation qu'il est difficile de résoudre de manière exacte. En procédant à l'étude des possibilités pour les valeurs de p_Z, on trouve que plusieurs valeurs peuvent convenir. En particulier, $p_Z = 0,54$ et $p_Z = 0,55$ conviennent.

Corrigé exercice 106 :

1. Comme on effectue des tirages avec remise, il est possible de prendre trois fois la boule verte. Cet événement n'est donc pas impossible.
2. Tirer une boule noire est une épreuve de Bernoulli de succès S_N « La boule tirée est noire » et de paramètre $p_N = \frac{7}{17}$. L'échec est « La boule tirée n'est pas noire ». La variable aléatoire N compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc N suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_N)$ de paramètres $n = 10$ et $p_N = \frac{7}{17}$. De même, R suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_R)$ de paramètres $n = 10$ et $p_R = \frac{9}{17}$. Pour finir, V suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_V)$ de paramètres $n = 10$ et $p_V = \frac{1}{17}$.
3. $P(N = 5) = \binom{10}{5} \left(\frac{7}{17}\right)^5 \left(1 - \frac{7}{17}\right)^5 \approx 0,210$

   $P(R = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{9}{17}\right)^6 \left(1 - \frac{9}{17}\right)^4 \approx 0,227$

   $P(V = 1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{17}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{17}\right)^9 \approx 0,341$
4. $P(N \leqslant 3) \approx 0,353$

   $P(R < 3) = P(R \leqslant 2) \approx 0,037$

   $P(V > 3) = 1 - P(V \leqslant 2) \approx 0,002$

5. $P(3 \leqslant N \leqslant 8) \approx 0,849$

6. On a $E(N) = n \times p_N = \frac{70}{17}$, $E(R) = n \times p_R = \frac{90}{17}$ et $E(V) = n \times p_V = \frac{10}{17}$. Lors d'un très grand nombre de tirages avec remise de 10 boules de cette urne, on obtient en moyenne par tirage de 10 boules $\frac{70}{17}$ boules noires, $\frac{90}{17}$ boules rouges et $\frac{10}{17}$ boules vertes. La somme de ces trois nombres est égale à 17.

Corrigé exercice 107 :

Chaque partie de chasse est une épreuve de Bernoulli de succès « Un dahu est capturé » et de probabilité $p = 0,05$. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où n est un entier naturel non nul. La probabilité de ne capturer aucun dahu est $P(X_n = 0) = (1-p)^n = 0,95^n$. La probabilité d'en capturer au moins un est $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,95^n$.
$1 - 095^n = 0,95 \Leftrightarrow 0,95^n = 0,05 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,95)} \approx 58,4$. On choisit donc $n = 59$.
Si la fonction ln n'a pas été étudiée, pour déterminer le rang n_0 à partir duquel $P(X \geqslant 1)$ est supérieur ou égal à 0,95, on peut procéder par tâtonnements ou utiliser le programme ci-dessous.

```python
def dahu():
    n = 1
    while 1 - 0.95**n < 0.95:
        n = n + 1
    return n
```

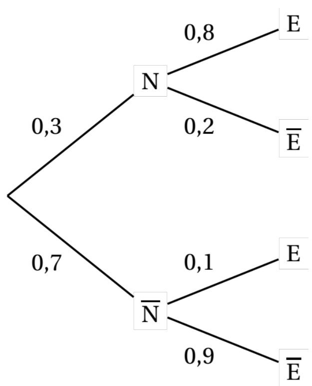
Le résultat retourné est 59. Il faut donc 59 chasses pour avoir une probabilité de 95 % d'attraper au moins un animal.

Corrigé exercice 108 :

Partie A

1. a. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité donc $P(N) = \frac{15}{50} = 0,3$ et $P_N(E) = \frac{8}{10} = 0,8$.

   b. La situation peut être représentée avec l'arbre pondéré suivant.



2. $P(N \cap E) = P(N) \times P_N(E) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$ La probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est égale à 0,24.

3. D'après la formule des probabilités totales $P(E) = P(N \cap E) + P(\overline{N} \cap E) = 0,24 + 0,7 \times 0,1 = 0,31$. La probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à 0,31.

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles $P_E(N) = \frac{P(E \cap N)}{P(E)} = \frac{0,24}{0,31} = \frac{24}{31}$. Sachant qu'il a gagné un bon d'achat, la probabilité que le client ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape est $\frac{24}{31}$.

Partie B

1. Le succès de l'épreuve de Bernoulli est le gain d'un bon d'achat de probabilité $p = 0,31$. Il y a $n = 100$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 100$ et $p = 0,31$.

2. On obtient $P(X = 30) \approx 0,085$.

3. X suit une loi binomiale donc $E(X) = np = 31$. En moyenne, pour 100 clients, il y a 31 gagnants et 310 euros sont donc offerts. Le budget de 250 euros n'est pas suffisant.

Corrigé exercice 109 :

Soient S et D les événements :
S : « C'est la méthode soignée qui est utilisée ».
D : « Trois articles sont défectueux sur un échantillon de 20 ».

1. a. La variable aléatoire donnant le nombre d'articles défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$. La probabilité d'avoir trois articles défectueux est $P_S(D) = \binom{20}{3} 0,05^3 \times 0,95^{17} \approx 0,060$

   b. La variable aléatoire donnant le nombre d'articles défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,10$. La probabilité d'avoir trois articles défectueux est $P_{\overline{S}}(D) = \binom{20}{3} 0,1^3 \times 0,9^{17} \approx 0,190$

2. D'après l'énoncé, on a $P(S) = 0,7$. On en déduit la probabilité que la méthode soigneuse ait été utilisée, sachant que sur un échantillon de 20 objets, trois sont défectueux en utilisant la formules des probabilités conditionnelles (on calcule $P(D)$ grâce aux résultats de la question précédente).

   $P_D(S) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{0,7 \times 0,060}{0,7 \times 0,060 + 0,3 \times 0,190} \approx 0,424$

3. En cas de refus de la palette, l'entreprise gagne –200 euros (donc elle perd 200 euros). Si elle l'accepte, l'espérance du gain est donnée par $-500 \times 0,576 + 700 \times 0,424 \approx 8,8$. Comme $8,8 > -200$, la palette doit être acceptée.

Corrigé exercice 110 :

1. Soit s le nombre de claviers à avoir en stock. La contrainte imposée consiste à trouver le plus petit entier tel que $P(X > s) \leqslant 0,05$. On peut utiliser un tableur pour résoudre ce problème.

   On trouve que la plus petite valeur de s telle que $P(X > s) \leqslant 0,05$ est $s = 68$. La probabilité d'une rupture de stock est alors 0,0398.

Nombre de claviers k	P(X<=k)	Pr. Rupture Stock
60	0,5379	0,4621
61	0,6178	0,3822
62	0,6932	0,3068
63	0,7614	0,2386
64	0,8205	0,1795
65	0,8697	0,1303
66	0,9087	0,0913
67	0,9385	0,0615
68	**0,9602**	**0,0398**
69	0,9752	0,0248
70	0,9852	0,0148
71	0,9916	0,0084
72	0,9954	0,0046
73	0,9976	0,0024
74	0,9988	0,0012
75	0,9994	0,0006

2. Quelques calculs rapides permettent de comprendre que le nombre de claviers en stock est le résultat d'un compromis. S'il n'y a pas assez de claviers, on aura souvent des ruptures de stocks, très coûteuses. S'il y en a trop, on limite les risques de rupture de stock, mais on paie du stockage pour rien. Le coût total des stocks est la somme de deux termes :

   - le coût moyen associé à une rupture de stock qui est égal à $1000E(Y)$ où Y suit une loi de Bernoulli de succès « Une rupture de stock survient » ;
   - le coût de stockage des claviers, c'est-à-dire le produit de 1 euros/clavier et du nombre de claviers stockés

   Pour $s = 68$, ce coût est de $1000 \times 0,0398 + 68 = 107,8$ euros.

Stock	Probabilité de rupture de stock	Coût moyen lié aux ruptures de stock	Coût lié au stock	Coût total (stock + risque rupture)
69	0,03985	39,85	69	108,85
70	0,02478	24,78	70	94,78
71	0,01478	14,78	71	85,78
72	0,00843	8,43	72	80,43
73	0,00460	4,60	73	77,60
74	0,00240	2,40	74	76,40
75	0,00119	1,19	75	76,19
76	0,00056	0,56	76	76,56
77	0,00025	0,25	77	77,25

   L'optimum est atteint pour $s = 75$ claviers en stock avec un coût moyen de 76,19 euros par jour.

Corrigé exercice 111 :

Si la variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre 3, on a, pour tout entier positif k, $P(X = k) = \frac{3^k}{k!}\mathrm{e}^{-3}$. On en déduit le tableau ci-dessous. Attention tout de même, $P(X \geqslant 6) \neq 0$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,050	0,149	0,224	0,224	0,168	0,101	0,050

La probabilité qu'il y ait au moins deux absents un jour donné est :
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) + P(X=1) = 1 - (0,05 + 0,149) = 0,801$.

Corrigé exercice 112 :

1. La variable aléatoire peut prendre pour valeur tout nombre entier naturel entre 1 et n. En effet, le premier succès peut être obtenu après un nombre quelconque d'épreuves.

2. Si $X = k$, cela signifie qu'il a fallu $k-1$ échecs avant d'obtenir le premier succès. On en déduit que $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

3. En notant S_n la somme considérée on a :

   $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \sum\limits_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = p \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1-p)^i$.

   Or $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (1-p)^i$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $1-p$. On en déduit donc que (avec $p \neq 0$) :

   $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^n}{p}$.

   Et donc $S_n = p\frac{1-(1-p)^n}{p} = 1-(1-p)^n$.

   Comme $1-p$ appartient à $[0;1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0$.

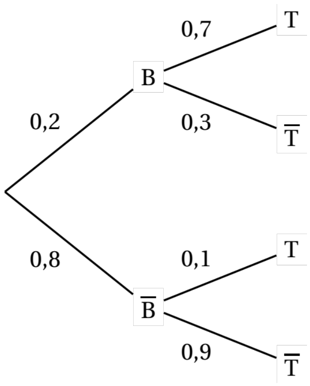
   On obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

   On a démontré que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$.

11 Préparer le bac

Corrigé exercice 113 :

1. Avec les informations de l'énoncé, on obtient l'arbre pondéré suivant.



2. a. On s'intéresse ici à l'événement $B \cap T$ dont la probabilité est :
$P(B \cap T) = P(B) \times P_B(T) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
La probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif est égale à 0,14.

   b. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) \\ &= 0,14 + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(T) \\ &= 0,14 + 0,8 \times 0,1 \\ &= 0,22 \end{aligned}$$

   La probabilité que le test soit positif est égale à 0,22.

   c. On sait que le test est positif. D'après la formule des probabilités conditionnelles on a : $P_T(B) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)} = \frac{0,14}{0,22} = \frac{7}{11}$. La probabilité que l'angine soit bactérienne sachant que le test est positif est égale à $\frac{7}{11}$.

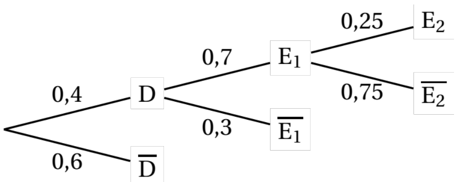
3. a. L'examen d'un malade est une épreuve de Bernoulli de succès T « Le test effectué sur le malade est positif », de probabilité $p = 0,22$ (d'après la question 2.b).La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,22$.

   b. L'événement « Au moins un des cinq tests est positif » correspond à l'événement contraire de « Aucun test n'est positif ». On obtient donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^5 \approx 0,71$.L'arrondi au centième de probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif est donc de 0,71.

   c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,22$ donc l'espérance de X est $E(X) = np = 5 \times 0,22 = 1,1$.

Corrigé exercice 114 :

1. a. On obtient, d'après les données de l'énoncé, l'arbre pondéré suivant.



   b. On obtient, par lecture de l'arbre :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(D \cap E_1) \\ &= P(D) \times P_D(E_1) \\ &= 0,4 \times 0,7 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

   c. F est l'événement contraire de E_2. Or $P(E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$donc $P(F) = 1 - P(E_2) = 0,93$.La probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. a. Chaque candidature est une épreuve de Bernoulli de succès « Le candidat est recruté » et de probabilité $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

   b. En appliquant la formule du cours, on obtient $P(X = 2) \approx 0,039$. L'arrondi au millième de la probabilité qu'exactement deux des cinq amis soient recrutés est 0,039.

3. Supposons que N personnes se portent candidats, où N est un entier naturel. On suppose également que les candidatures sont étudiées de manières identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y donnant le nombre de candidats retenus suit une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$.La probabilité qu'aucun candidat ne soit retenu est $P(Y = 0) = (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.La probabilité qu'au moins un candidat soit retenu est donc de $1 - 0,93^N$. On cherche à déterminer la plus petite valeur de N telle que cette probabilité soit supérieure à 0,999.

$$\begin{aligned} 1 - 0,93^N > 0,999 &\Leftrightarrow 0,93^N < 0,001 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,93^N\right) < \ln(0,001) \\ &\Leftrightarrow N \ln(0,93) < \ln(0,001) \\ &\Leftrightarrow N > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \end{aligned}$$

car $\ln(0,93) < 0$. On obtient alors $N > 95,2$.Le nombre minimum de dossiers à traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 est 96.

Corrigé exercice 115 :

Dans tout l'exercice, on note B_1 l'événement « La première boule prélevée est blanche » et B_2 l'événement « La deuxième boule prélevée est blanche ».
Partie A

1. Pour gagner, il faut soit tirer une boule blanche puis une boule noire, soit tirer une boule noire puis une boule blanche. La probabilité de gagner une partie est donc $p = P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) = 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 = 0,42$.

2. a. Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de succès « La partie est gagnée » et de probabilité p. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   b. L'événement « Le joueur gagne au moins une partie » est le contraire de « Le joueur perd toutes les parties ». Donc la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p_n = 1-(1-p)^n = 1-0,58^n$. On en déduit que $p_{10} \approx 0,996$.

   c. On montre que $p_8 \approx 0,987$ et $p_9 \approx 0,993$. Il faut donc au moins 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % (on pourrait également utiliser la fonction ln). Partie B

1. a. $Y_k = 5$ lorsque le joueur tire deux boules de couleurs différentes donc

$$\begin{aligned} P(Y_k = 5) &= P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} + \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} \\ &= \frac{6k}{(k+3)^2}. \end{aligned}$$

   b. La loi de probabilité du gain Y_k est résumée dans le tableau ci-dessous.

g_i	-9	-1	5
$P(Y_k = g_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. L'espérance de Y_k est :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-(k-27)(k-3)}{(k+3)^2} \end{aligned}$$

$E(Y_k) > 0$ si, et seulement si, $k \in]3;27[$. Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, le nombre de boules noires k est strictement compris entre 3 et 27.